

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2024-25 г. г.**  
**Заключительный этап** **10 класс**  
*Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов*

**10.1.** Отрезок  $AB$  точками  $P$  и  $M$  разбит на три отрезка  $AP$ ,  $PM$  и  $MB$ , из которых можно составить треугольник. Найти все точки  $X$ , лежащие внутри отрезка  $PM$  для произвольного такого разбиения.

**10.2.** Найти все тройки действительных чисел  $a, b, c$ , удовлетворяющих системе уравнений: 
$$\begin{cases} ab - c = 3, \\ a + bc = 4, \\ a^2 + c^2 = 5. \end{cases}$$

**10.3.** В равнобедренном треугольнике с основанием  $AC$  и углом  $ABC=20^\circ$  при вершине  $B$ , на стороне  $AB$  отмечена точка  $H$  такая, что угол  $AHC=30^\circ$ . Доказать  $AC=BH$ .

**10.4.** Найти все натуральные числа  $n \geq 3$  такие, что для любого целого числа  $m \geq 0$  существуют  $n$  целых чисел  $x_1, \dots, x_n$  таких, что  $x_1 + \dots + x_n = 0$  и  $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = -m$ . Среди чисел  $x_1, \dots, x_n$  могут быть совпадающие.

**10.5.** По кругу в некотором порядке выписаны все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Пара не соседних чисел  $a$  и  $b$  называется *хорошей*, если все числа, выписанные по одну из сторон от хорды, соединяющей  $a$  и  $b$ , меньше  $a$  и  $b$ . Какое количество хороших пар чисел может содержаться среди выписанных, в зависимости от порядка записи? Найти все возможные значения.

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2024-25 г. г.**  
**Заключительный этап** **10 класс**  
*Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов*

**10.1.** Отрезок  $AB$  точками  $P$  и  $M$  разбит на три отрезка  $AP$ ,  $PM$  и  $MB$ , из которых можно составить треугольник. Найти все точки  $X$ , лежащие внутри отрезка  $PM$  для произвольного такого разбиения.

**10.2.** Найти все тройки действительных чисел  $a, b, c$ , удовлетворяющих системе уравнений: 
$$\begin{cases} ab - c = 3, \\ a + bc = 4, \\ a^2 + c^2 = 5. \end{cases}$$

**10.3.** В равнобедренном треугольнике с основанием  $AC$  и углом  $ABC=20^\circ$  при вершине  $B$ , на стороне  $AB$  отмечена точка  $H$  такая, что угол  $AHC=30^\circ$ . Доказать  $AC=BH$ .

**10.4.** Найти все натуральные числа  $n \geq 3$  такие, что для любого целого числа  $m \geq 0$  существуют  $n$  целых чисел  $x_1, \dots, x_n$  таких, что  $x_1 + \dots + x_n = 0$  и  $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = -m$ . Среди чисел  $x_1, \dots, x_n$  могут быть совпадающие.

**10.5.** По кругу в некотором порядке выписаны все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Пара не соседних чисел  $a$  и  $b$  называется *хорошей*, если все числа, выписанные по одну из сторон от хорды, соединяющей  $a$  и  $b$ , меньше  $a$  и  $b$ . Какое количество хороших пар чисел может содержаться среди выписанных, в зависимости от порядка записи? Найти все возможные значения.