

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2024-25 г. г.
Заключительный этап **10 класс**
Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

10.1. Отрезок AB точками P и M разбит на три отрезка AP , PM и MB , из которых можно составить треугольник. Найти все точки X , лежащие внутри отрезка PM для произвольного такого разбиения.

10.2. Найти все тройки действительных чисел a, b, c , удовлетворяющих системе уравнений:
$$\begin{cases} ab - c = 3, \\ a + bc = 4, \\ a^2 + c^2 = 5. \end{cases}$$

10.3. В равнобедренном треугольнике с основанием AC и углом $ABC=20^\circ$ при вершине B , на стороне AB отмечена точка H такая, что угол $AHC=30^\circ$. Доказать $AC=BH$.

10.4. Найти все натуральные числа $n \geq 3$ такие, что для любого целого числа $m \geq 0$ существуют n целых чисел x_1, \dots, x_n таких, что $x_1 + \dots + x_n = 0$ и $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = -m$. Среди чисел x_1, \dots, x_n могут быть совпадающие.

10.5. По кругу в некотором порядке выписаны все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Пара не соседних чисел a и b называется *хорошей*, если все числа, выписанные по одну из сторон от хорды, соединяющей a и b , меньше a и b . Какое количество хороших пар чисел может содержаться среди выписанных, в зависимости от порядка записи? Найти все возможные значения.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2024-25 г. г.
Заключительный этап **10 класс**
Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

10.1. Отрезок AB точками P и M разбит на три отрезка AP , PM и MB , из которых можно составить треугольник. Найти все точки X , лежащие внутри отрезка PM для произвольного такого разбиения.

10.2. Найти все тройки действительных чисел a, b, c , удовлетворяющих системе уравнений:
$$\begin{cases} ab - c = 3, \\ a + bc = 4, \\ a^2 + c^2 = 5. \end{cases}$$

10.3. В равнобедренном треугольнике с основанием AC и углом $ABC=20^\circ$ при вершине B , на стороне AB отмечена точка H такая, что угол $AHC=30^\circ$. Доказать $AC=BH$.

10.4. Найти все натуральные числа $n \geq 3$ такие, что для любого целого числа $m \geq 0$ существуют n целых чисел x_1, \dots, x_n таких, что $x_1 + \dots + x_n = 0$ и $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = -m$. Среди чисел x_1, \dots, x_n могут быть совпадающие.

10.5. По кругу в некотором порядке выписаны все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Пара не соседних чисел a и b называется *хорошей*, если все числа, выписанные по одну из сторон от хорды, соединяющей a и b , меньше a и b . Какое количество хороших пар чисел может содержаться среди выписанных, в зависимости от порядка записи? Найти все возможные значения.